R&T1 C.Socquet

TD1 et 2 : *Limites et Dérivées simples*

Exercice 1

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} x\ln x$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+x^4}{e^x}$

$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4-\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x^3+1}{x^4-x}$; $\lim_{x\to0} cos\left(\frac{x^3}{x+2x^2}\right)$; $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{2x^2+x-3}$;

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x}+2}{e^x}\right)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3+x}}{2^x}$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

En plus : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3-x}}{2^x}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x\tan x$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{\ln x}$; $\lim_{x\to-\infty} e^x x^5$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{x^3}}.\sin x$; $\lim_{x\to0} \frac{x+x^2}{x^3}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4-\sqrt{x}}$; ; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+x^3-1}{x^5-x^2+2}$

Exercice 2 : Calcul de dérivées simples

Calculer les dérivées des fonctions f définies par :

$f(x) = \frac{sinx}{x}$; $f(x) = -x+\frac{3}{x}$; $f(x) = \sqrt{x}+\frac{1}{x^6}$; $f(x) = x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-5$;

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{5}$; $f(x) = x\sqrt{x}$; $f(x) = \ln(4x)$; $f(x) = \sqrt{3x}$; $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$;

$f(x) = \frac{e^{2x}}{lnx}$; $f(x) = tanx = \frac{sinx}{cosx}$; $f(x) = (x-3)(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$; $f(x) = |1-x|$

$f(x) = 2^x$; $f(x) = log_{10}(x)$; $f(x) = log_2(3x)$

En plus :

$f(x) = \frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{5}{3}x$; $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x-3}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-sinx}$; $f(x) = cosx.tanx$

Exercice 3 : Dérivées de fonctions composées

Soient f, g et h trois fonctions réelles définies par :

$$f(x) = \cos(x); g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x$$

Ecrire $(f\circ g)(x); (g\circ f)(x); (h\circ g)(x)$ et calculer leurs dérivées.

TD 3 : *Dérivées composées et études de fonctions*

Exercice 1 : Dérivées de fonctions composées

Déterminer le domaine de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes puis donner le domaine de dérivabilité.

$f(x) = (sin4x)^3$; $f(x) = (ln5x)^2$; ; $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{sinx}$

$f(x) = cos^3(x) - 3\sin(3x)$; $f(x) = \sqrt{x^2 + cosx}$; $f(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{3/2}$

Exercice 2

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. La courbe représentative de f a-t-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation y = -x + 1 ?
Si oui, en quels points ?

Exercice 3

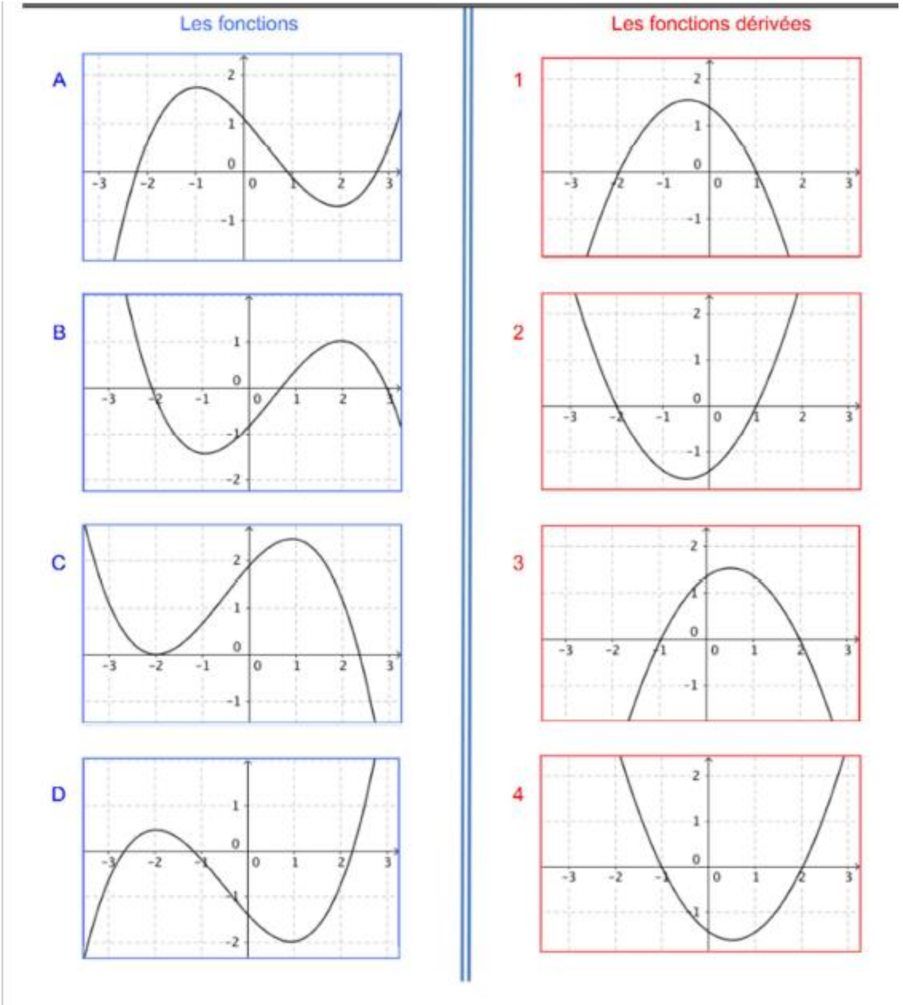
Déterminer les équations des tangentes à la courbe Cf d'équation

$y = x^3 - 2x^2 + 4$ aux points A(2, 4) et B(-1, 1).

En quel(s) point(s) la tangente est-elle horizontale ?

Exercice 4

Associer les courbes des fonctions et celles de leurs fonctions dérivées :



TD4 : *Asymptotes et points critiques*

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^3-x+7}{x^2-2}$.
Donner son domaine de définition.
Dresser la liste de toutes les asymptotes à sa courbe.

En plus : Idem avec la fonction $f(x) = 4 - x - \frac{2}{(1+x)^2}$

Exercice 2

Déterminer si les fonctions suivantes admettent des extrema et donner leur nature : $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ et $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Exercice 3

Soit la fonction f : x $\rightarrow \sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

1. Sur quels intervalles est-elle strictement monotone ?
2. Expliciter sa fonction réciproque.
3. Dessiner f et f^{-1}.

TD 5 et 6 : *Etudes*

Exercice 1

Soit la fonction f(x) = $\dfrac{x^3}{x+1}$

- Donner son domaine de définition.
- f est-elle paire ? est-elle impaire ? Périodique ?
- Quelles sont ses limites aux bornes de domaine ?
- Calculer sa dérivée.
- Dessiner et compléter son tableau de variation.
- A-t-elle une ou des asymptote(s) ? si oui, donner son ou leurs équation(s).
- A-t-elle une ou des branches infinie(s) ? si oui, la ou les décrire.
- Dessin de la courbe (points particuliers, tangentes, asymptotes)

Exercice 2

Etude de la fonction $f(x) = cos^3(2x)$

Exercice 3 en plus

Etude de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

Exercice 4 en plus

Etude de la fonction $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

TD 7 et 8 : *Différentielles*

Exercice 1

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$f(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2x}\right)$ en $x = 1$

$f(x) = \frac{3x-4}{x+1}$ en $x = 2$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ en $x = -1$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Calculer sa différentielle df au point $x_0 = 1$.
Donner l'expression de la variation δf au point $x_0 = 1$.
Comparer df et δf lorsque $\delta x = 0{,}1$, puis $\delta x = -0{,}01$.

Exercice 3

Le côté x = 10 cm d'un cube de volume x^3 varie de δx = 1mm.
De combien varie le volume exactement ?

Quelle approximation a-t-on avec le calcul différentiel ?

Exercice 4

Approximativement, de combien augmente le volume d'une sphère si son rayon R = 15 cm s'allonge de 2 mm ?

Approximativement, de combien varie la surface d'une sphère si son volume V = 4π cm^3 diminue de 1 cm^3.

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
Calculer sa différentielle df et sa variation δf
En déduire la formule $\sqrt{x+\delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\delta x}{2\sqrt{x}}$.

Utiliser ce résultat pour calculer $\sqrt{5}$.

Exercice 6

Calculer les différentielles des relations suivantes :

$$t = \cos(x) \; ; \; u = \frac{1}{t} \; ; \; t = u^2 \; ; \; x = \sqrt{3t+4} \; ; \; t^2 = u^3$$

RT1 C.Socquet

TD 9 et 10 : Intégration simple

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{1} e^{3x-1}.dx$ $I_2 = \int_0^1 (2x+3)(3x-5).dx$

$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{3x-2}.dx$ $I_4 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2x+\frac{\pi}{2}).dx$

$I_5 = \int_1^2 \frac{3}{\sqrt{x}}.dx$ $I_6 = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^3}+\sqrt{x}\right).dx$

$I_7 = \int_4^5 (5-x)^3.dx$ $I_8 = \int_{-1}^{0} \frac{4}{(x+2)^3}.dx$

En plus : Calculer $I_1 = \int_0^1 (x+x^4).dx$ et $I_2 = \int_0^{\pi/4} \sin(2x).dx$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int (\cos(3x) + tanx).dx$; $B = \int \frac{xe^x - 2}{x}.dx$;

$C = \int \left(e^{2x} + \frac{1}{e^x}\right).dx$; $D = \int \frac{t^2+1}{t}.dt$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{2} e^{3tx}.dx$ $I_2 = \int_{-1}^{2} e^{3tx}.dt$

$I_3 = \int_1^2 \frac{-7t}{x^4}dx$ $I_4 = \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\pi f x).dx$

TD11 : Intégration composée

Exercice 1

Les dérivées sont de la forme

$$n.u'.u^{n-1}\ ;\ u'.e^{u}\ ;\ u'.cosu\ ;\ u'.sinu\ ;\ \frac{u'}{u}$$

Donner la forme des résultats suivants :

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$; $\frac{4x+6}{x^2+3x+7}$; $\cos(x).\sin(x)$; $3x.\sin(x^2)$; $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $\frac{1}{x.lnx}$;
$\frac{1}{x}.lnx$; $-x^2.(x^3+5)^4$; $\frac{tanx}{(cosx)^2}$; $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$.

Exercice 2

A l'aide du tableau des primitives composées, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{2\pi/3}^{5\pi/6}(1+\cos t)\tan t dt$ $I_2 = \int_0^1 3x^2e^{x^3}.dx$ $I_3 = \int_0^1 x(x^2-1)^2.dx$

$I_4 = \int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}.dx$ $I_5 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}dx$ $I_6 = \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$

Exercice 3 (intégration complexe)

Démontrer que $\int e^{ix}dx = \frac{e^{ix}}{i}$ + K

TD12 : Intégration par changement de variables

Exercice 1 : changement de variables

$I_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}dx$ en posant t = 2x+1

$I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x-10)^2}dx$ en posant $t = e^x - 10$

$I_3 = \int_2^4 \frac{\ln t - 1}{t \ln t}dt$ en posant x = ln(t)

$I_4 = \int_3^4 \frac{x+1}{(x-2)^2}dx$ en posant t = x – 2.

TD13 : Intégration par parties

Exercice 1: Intégration par parties

$$I_1 = \int_0^{\pi} t.\sin(t)\,.\,dt$$

$$I_2 = \int_0^{1} (2x+1).\,lnx.\,dx$$

$$I_3 = \int_0^{1} \frac{x+1}{e^x}.\,dx$$

Pour s'entraîner

$I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$; $I_2 = \int_1^4 \ln\frac{5-t}{2t}dt$; $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \ln(1+\cos t)dt$

TD14 : Intégration généralisée et applications

Exercice 1: Intégration généralisée

Après avoir identifié la valeur à risque, étudier le résultat (convergence) de ces intégrales :

$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{3-x}dx$; $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$; $I_3 = \int_0^{+\infty} \cos x dx$; $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx$; $I_6 = \int_0^1 x \ln x dx$; $I_7 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

Exercice 2

Dessiner la surface délimitée par les courbes d'équations $y = x^2 -2x +1$, $y = 5x + 1$ et $y = -x + 13$

A l'aide d'une intégrale, calculer l'aire de cette surface.

Exercice 3

Une particule se déplace le long d'une droite à une vitesse donnée à chaque instant t par $v(t) = t^2 - t - 6$ (mesurée en mètres par seconde).

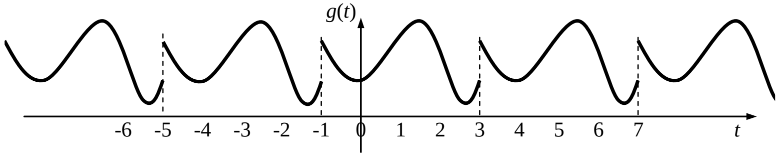
1. Calculer le déplacement de la particule entre t = 1 et t = 4.
2. Calculer la distance parcourue pendant cet intervalle de temps.

TD 15 : Séries de Fourier

.

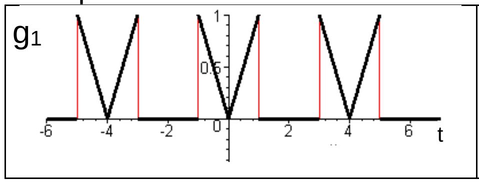
Exercice 1 (aucun calcul demandé)

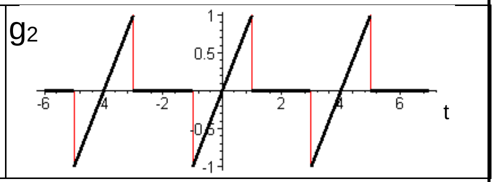
Soit la fonction *g* périodique dont le graphe est donné ci-dessous :



Quelle est la période de g ?
Quelle est la fréquence fondamentale de g ? Quelle est la pulsation ?
Quelles sont les fréquences de ses harmoniques ?
Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
Déduire les intégrales qu'il faudrait calculer pour déterminer les a_0, a_n et b_n.

Idem pour





Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser si elle est périodique (si oui, donner la période) et déduire l'amplitude du fondamental et des différents harmoniques :

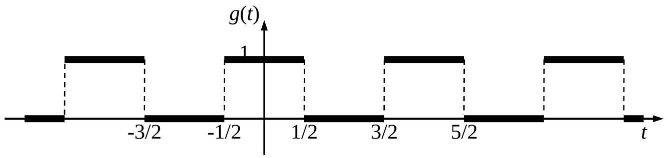
- $h(t) = -1 + 3sin(1{,}5t) - cos(1{,}5t) - 2cos(0{,}5t) + 4sin(0{,}5t) - \frac{1}{2}sin(t)$
- $f(t) = 3 - 2cos(0{,}8t) + 3sin(0{,}4t) - cos(1{,}2t) + 2sin(1{,}2t) - cos(0{,}4t)$
- $g(t) = 4 - 3cos(0{,}5t) - sin(0{,}5t) - 5cos(t) + 2sin(t) - 4cos(0{,}2t)$

Remarque: l'amplitude de l'harmonique de rang n est $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

TD 16 et 17 : *Séries de Fourier*

Exercice 1

Soit la fonction *g* périodique dont le graphe est donné ci-dessous :



Quelle est la période de g ? En déduire la fréquence de son fondamental et de ses harmoniques.

Calculer les expressions des coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier de g.
Calculer a_n pour n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Que vaut le rapport $\left|\frac{a_n}{a_1}\right|$ lorsque n est impair ?

Ecrire la série de Fourier S(t) jusqu'à l'ordre 6.

Exercice 2

Soit g le signal impair de période 4 défini par :

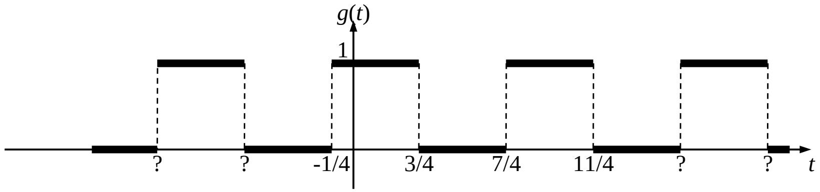
$$\begin{cases} g(t) = 1 \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \\ g(t) = t \text{ pour } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

1. Représenter graphiquement cette fonction.
2. Donner l'expression des coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier de g. En déduire la valeur de b_1, b_2 et b_3
3. Ecrire la série de Fourier S(t) jusqu'à l'ordre 3.
4. Calculer la puissance de ce signal.
5. Le signal est filtré en ne conservant que les harmoniques de rangs 1, 2 et 3. Déterminer la puissance de ce signal.

TD 18 : *Séries de Fourier*

Exercice 1

Soit la fonction dont le graphe est donné ci-dessous :



1. Que vaut la période de g ? En déduire les valeurs manquantes (?) sur le graphe.
2. En déduire sa fréquence fondamentale et l'expression des fréquences de tous ses harmoniques.
3. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
4. Que vaut a_0 ?

Pour n ≥ 1, on montre : $a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ et $b_n = \frac{2}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Calculer a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5
6. Écrire la série jusqu'au rang 5.
7. Écrire le développement de Fourier de g sous la forme d'une somme de cosinus d'amplitudes A_n éventuellement déphasés de l'angle φ_n.
8. Calculer, à l'aide de la définition, les coefficients c_n du développement en séries de Fourier complexe de g.

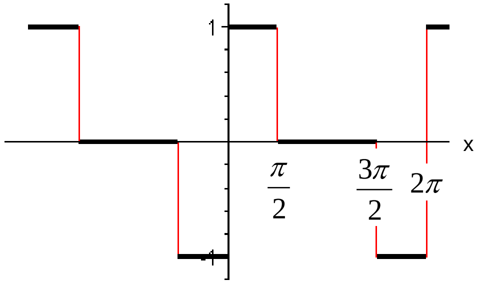
NB : dans ce calcul, on pourra factoriser $e^{-j\frac{\pi n}{4}}$

9. Vérifier le calcul précédent en calculant les c_n à partir des a_n et b_n.

TD 19 : *Séries de Fourier*

Exercice

Soit la fonction f représentée par :



1. Quelle est la période de f ?
2. Calculer la valeur moyenne et la puissance de f sur une période.

3. Ecrire la série de Fourier de f jusqu'à l'ordre 8.

4. La sommation obtenue sur une infinité de termes est-elle en tout point d'abscisse x égale à la valeur de f(x) ?

5. Représenter le spectre du signal.

6. On note P_n la puissance de l'harmonique de rang n. Calculer P_n pour n allant de 1 à 6.

Combien d'harmoniques sont-elles nécessaires pour transmettre au moins 60% de la puissance du signal ? Quel pourcentage de la puissance sera transmis par le fondamental et les cinq premiers harmoniques.