TD 1 : Calculs algébriques

Exercice 1 : Nombres rationnels

Décomposer la fraction en faisant apparaître sa partie entière :

$\frac{18}{5}$; $\frac{146}{13}$; $\frac{-23}{4}$

Réduire les fractions suivantes :

$\frac{87}{12}$; $-\frac{3ab}{a^2}$; $\frac{3+4}{3+11}$; $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}$; $\frac{3}{7}-\frac{2}{10}$; $\frac{2}{3}-5$; $\frac{a}{4}+\frac{b}{5}$;
$\frac{1}{15}+\frac{1}{3}-\frac{3}{20}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^3}$; $\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}$; $-4\times\frac{7}{-3}$; $\frac{1}{2}+\frac{7}{x}\times\frac{5}{4}$

Quel est l'inverse de $\frac{7}{2}$; -3 ; $\frac{1}{-15}$? Quelle notation utilise-t-on ?

Réduire les fractions suivantes :

$\frac{-1}{5}\div 6$; $5/\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}\div\frac{7}{2}$; $\frac{\frac{7}{3}}{21}$; $\frac{36}{\frac{9}{2}}$; $\frac{\frac{7}{12}-\frac{4}{3}}{\frac{11}{8}}$; $\frac{3}{4/3}\div\frac{\frac{1}{2}}{9}$; $\frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

Exercice 2 : Développement/Factorisation/Identités remarquables

Développer les écritures suivantes : $A(x) = \frac{3}{2}(-1+6+\frac{x}{2}) - \frac{7}{2}x$;

$B(x) = (-x + 1)(x + 1) + 4(2x-2)$; $C(x) = -3(x + 4) +(1 - x)^2(1 + x - 3)$;
$D(x) = (x+1)^3 - 1$; $E(x)=(x^3 + x^2 - 2x+1)(x^3 - x^2 - 2x - 1)$

Factoriser les écritures suivantes :

$A(x) = x^2 + 2x +1$; $B(x) = 4x^2 - 9$; $C(x) = (x + 1)(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1)$
$D(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Voici des identités remarquables à compléter :

$(x + \dots)^2 = \dots + \dots + 25$ $(\dots - 5x)^2 = \dots - 30xy + \dots$
$(\dots+\dots)^2 = 25x^2 + \dots + 9y^2$ $(\dots-\dots)^2 = x^2 - 2x + \dots$

Exercice 3: Equations

Résoudre les équations suivantes ***sans calculatrice*** *:*

(E_1) $-2(1-x)+3 = 2x+1$ (E_2) $(2x-3)(3+6x) = 0$

(E_3) $x^2 - 36 = 0$ (E_4) $3x^2 + 2x = 0$

(E_5) $\frac{1}{3}x + 11 = \frac{4}{5}x - 2$ (E_6) $\frac{4}{x-1} = \frac{1}{x}$ (E_7) $\frac{x^{-1}}{2} + \frac{1}{3} = 5$

(E_8) $\frac{x-2}{3-2x} = 5$ (E_9) $(x-9)^2 - (7x+6)(x-9) = 0$

(E_{10}) $(3x - 4)^2 = 4$

TD 2 : Calculs algébriques

Exercice 1 : Puissances/Racines

Sans calculatrice, calculer

$$5^2 \; ; \; \frac{10^3}{10^{-2}} \; ; \; (10^5)^{-2} \; ; \; \frac{4.10^3+12.10^5+8.10^2}{8.10^2}$$

Simplifier 27^5 ; 35^4 en utilisant les **nombres premiers**
Réécrire le double de 2^{11}.

Remplir

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times 5^2 = 2^?5^?;\; (a^{-1}b^2c)^2(a^{-3})^3(a^2bc)^{-2} = a^?b^?c^?$

$\frac{2^{-4}\times x^5}{x\times 2^2} = 2^?x^?;$ $\qquad \frac{x^3\frac{1}{\sqrt[4]{x}}x^{-1}}{x^{1/2}\sqrt{9x}} = a.x^?$

Simplifier $\sqrt{24}+\sqrt{75}$; $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$; $\left(\sqrt{24}\right)^2+\left(\sqrt{75}\right)^5$; $\frac{\sqrt{2+4}}{\sqrt{6^2}}$;
$4\sqrt{63}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{7}}-8\sqrt{7}$; $\left(3\sqrt{2}-4\right)^2$; $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-64}$

Résoudre (E_1) $x^2 = 16.10^{-8}$ (E_2) $x^{1/3} = 3.10^2$ (E_3) $5 - 4\sqrt[3]{x} = 10$

Exercice 2: le trinôme

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) $x^2 + x - 2 = 0$
(E_2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
(E_3) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
(E_4) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Voici des trinômes sous forme développée

$P_1(x) = x^2 + 6x + 10$
$P_2(x) = x^2 - 2x + 1$
$P_3(x) = 2x^2 - 12x - 14$

Donner leur **forme canonique** et si elle existe leur **forme factorisée.**

Exercice 3 : Inéquations

Déterminer les intervalles définis par :

(E_1) $x \leq 6$ (E_2) $-1 \leq x < 2$ (E_3) $2x + 1 \geq -4$

(E_4) $\frac{2x-5}{x+2} > 0$ (E_5) $\frac{x(x+1)}{3-2x} < 0$ (E_6) $\frac{2}{2x-3} < 4$

(E_7) $x^2 + 1 \geq 1$ (E_8) $x^2 - 1 \geq 5$ (E_9) $(x - 3)^2 - (3x + 1)^2 > 0$

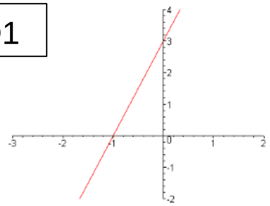
(E_{10}) $x^2 + x - 6 < 0$

TD 3 : les droites

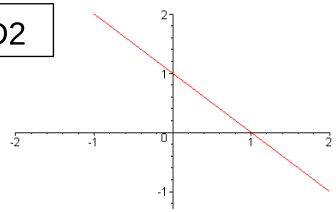
Exercice 1: Pentes et droites

Pour chacune des droites suivantes :

D1



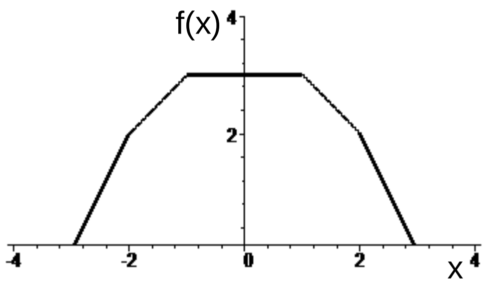
D2



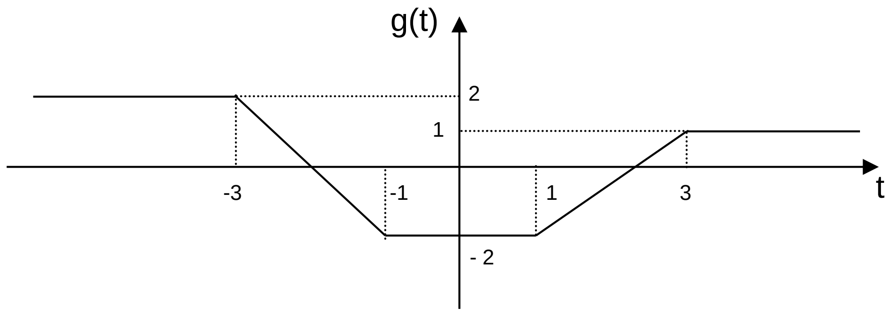
Donner une équation cartésienne, l'équation réduite et un vecteur directeur.

Exercice 2

La courbe de f ci-contre est constituée de 5 droites. Donner l'équation de chacune de ces droites par intervalle.



De même pour la courbe représentative de la fonction g :



Exercice 3 :

Déterminer a pour que la droite d'équation

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a = 0 \text{ soit :}$$

1/parallèle à Ox 2/Parallèle à Oy 3/passe par l'origine

Exercice 4 :

Après les avoir dessinées, écrire l'équation de chacune des droites D suivantes :

- D passe par le point M(3,-1) et D est parallèle à D' : $x + y = 0$
- D passe par le point M(-3,4) et a pour pente $m = -2$
- D passe par le point M(1,3) et est orthogonale au vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Exercice 5 :

Déterminer les parties du plan définies par :

1/ $y \leq 6x$ 2/ $y + 1 \leq x < 7$

TD 4 : Fonctions trigonométriques

Exercice 1

1. Dessiner le cercle trigonométrique

2. Lire sur ce cercle les valeurs particulières suivantes :

cos0; cos($\frac{\pi}{2}$); cos(-$\frac{\pi}{2}$); cos($\frac{\pi}{3}$); sin($\frac{\pi}{4}$); tan($\frac{\pi}{4}$); sin($\frac{\pi}{2}$); cos($\frac{3\pi}{4}$);

sin($\frac{2\pi}{3}$) ; cos(-$\frac{\pi}{4}$) ; cos($\frac{\pi}{6}$) ; sin(-$\frac{2\pi}{6}$) ; tan($\frac{\pi}{3}$) ; sin(2 π) ; sin($\frac{5\pi}{4}$)

Exercice 2

1. Sur le cercle trigonométrique, pour un angle donné x (le choisir petit), situer les valeurs suivantes cosx, sinx et tanx.

Et dire si les formules suivantes sont vraies ou fausses ?

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$
$\sin(x + \pi) = \sin(x)$	$\cos(x + \pi) = \cos(x)$	$\tan(x + \pi) = \tan(x)$
$\sin(- x) = \sin(x)$	$\cos(- x) = \cos(x)$	$\tan(- x) = \tan(x)$
$\cos(\pi/2+x) = \sin(x)$	$\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$	$\cos(\pi/2- x) = \sin(x)$

2. Sur le même principe, donner les expressions des cosinus, sinus et tangentes suivantes :

cos($\pi - \theta$); sin($\pi - \theta$); tan($\pi - \theta$); sin($\frac{\pi}{2}$ - θ); sin($\frac{\pi}{2}$ +θ); cos ($\theta - \frac{\pi}{2}$).

Exercice 3

Résoudre

(E1) $cosx = 0$ (E2) $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (E3) $sin(3x) = \frac{1}{2}$

Exercice 4

Sachant que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $sinx = \frac{1}{3}$, déterminer la valeur exacte de $cosx$ et $tanx$.

Exercice 5

Résoudre l'inéquation suivante (E) $sinx > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6

Dessiner précisément les fonctions suivantes :

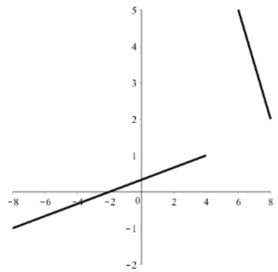
$$f_1(x) = 2\cos(x) \;;\; f_2(x) = \sin(2x) \;;\; f_3(x) = \tan(x)$$

R&T1 C.Socquet

TD 5 : Introduction aux signaux : propriétés

Exercice 1:

Donner le domaine de définition et le domaine image de la fonction dessinée :



Exercice 2 : domaine de définition

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2-1} \qquad f_2(x) = \sqrt{2x^2 - x - 3}$$

Exercice 3 : domaine Image

Donner le domaine image des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x-3)^2 - 4\ ;\ f_2(x) = 3x^2 + 6x - 2\ ;\ f_3(x) = 3\cos(x) - 1$$

Exercice 4 : parité

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(-x)$ et dire si elles sont paires, impaires ou ni paires ni impaires.

$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 1\ ;\ f_2(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ f_3(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 5 :

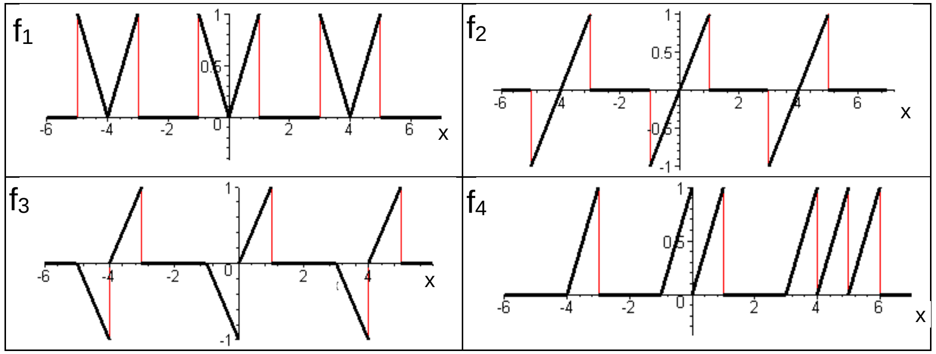
Quelles sont les périodes respectives des fonctions cos, sin et tan ?
Quelles sont les périodes des fonctions suivantes ?

$$f_1(t) = \sin(3t)\ ;\ f_2(t) = \cos(6\pi t)\ ;\ f_3(t) = \sin\left(\frac{t}{6}\right)\ ;$$
$$f_4(t) = \cos(48t)\ ;\ f_5(t) = \cos(12t)$$

TD 6 : Introduction aux signaux : périodes

Exercice 1 :

Préciser si les fonctions ci-dessous sont périodiques (si oui, donner la période) puis si elles paires ou impaires.



Exercice 2 :

Quelles sont les périodes respectives des fonctions cos, sin et tan ?
En déduire les périodes des fonctions suivantes :

sin(3x), $\cos(4x + \frac{3\pi}{4})$, $3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, tan(3x), $\cos(\pi x)$, $3\sin(2\pi x+\frac{\pi}{4})$,

Exercice 3 :

Parmi ces fonctions combien sont $\frac{\pi}{3}$ périodiques ?

$$f_1(t) = \sin(3t)\,;\ f_2(t) = \cos(6\pi t)\ ;\ f_3(t) = \sin\left(\frac{t}{6}\right)\ ;$$
$$f_4(t) = \cos(48t)\ ;\ f_5(t) = \cos(12t)$$

Exercice 4:

Quelles sont les périodes des fonctions suivantes ?

1- $f_1(t) = 2\cos(t) + \tan(t)$
2- $f_2(t) = 1 + \sin(3t) + \cos(5t)$
3- $f_3(t) = \sin(4t) - 2\cos(6t) + 4\cos(12t)$
4- $f_4(t) = \frac{1}{2} + \sin(4\pi t) + \cos(8\pi t) - \sin(12\pi t)$

Exercice 5 :

Dessiner des signaux suivants :

Soit g un signal pair de période 2 défini par

$$g_1(t) = \begin{cases} 1\ pour\ 0 \le t < 1/2 \\ 0\ pour\ 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Soit g un signal impair de période 6 défini par

$$g_2(t) = \begin{cases} t\ pour\ 0 \le t \le 2 \\ 0\ \ pour\ 2 < t \le 3 \end{cases}$$

Soit g un signal impair de période 3 défini par

$$g_3(t) = \begin{cases} 0\ pour\ 0 \le t < 1/2 \\ 1\ pour\ 1/2 \le t < 1 \\ 0\ pour\ 1 \le t < 3/2 \end{cases}$$

Décrire de la même façon, f_1 et f_2 de l'*Exercice 1* .

TD 7: *Introduction aux signaux : fonction échelon unité $\mathcal{U}$*

Exercice 1 :

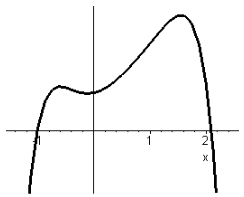
On rappelle que la fonction **échelon unité** $\mathcal{U}$ est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \\ \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Représenter $\mathcal{U}$ (t), $\mathcal{U}$ (t) + 1, 2$\mathcal{U}$(t), -$\mathcal{U}$ (t) + 1, $\mathcal{U}$(t - 2), $\mathcal{U}$ (t) - $\mathcal{U}$ (t - 2).

A partir de la fonction $g(t) = t$, dessiner $g(t).\mathcal{U}$ (t), $g(t).\mathcal{U}$ (t - 2) puis g(t - 2).$\mathcal{U}$ (t -2),

A partir de la fonction f dessinée ci-dessous, dessiner f (t). $\mathcal{U}$ (t) ;
f(t).$\mathcal{U}$ (t -1) ; f(t).($\mathcal{U}$ (t) - $\mathcal{U}$(t -1))



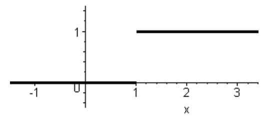
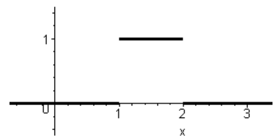
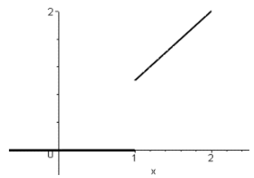
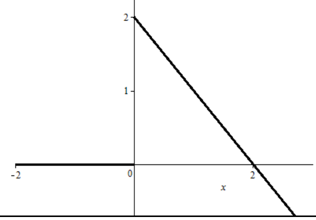
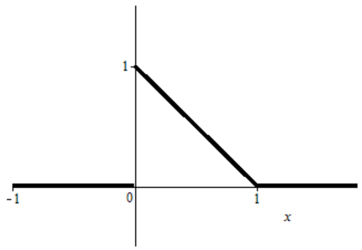
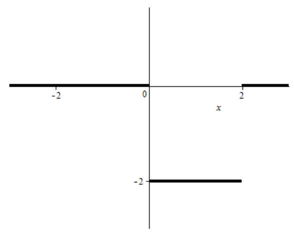
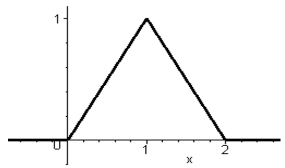
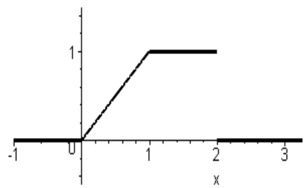
Exercice 2 :

Dessiner chacune des fonctions suivantes puis donner leurs expressions littérales :

La fonction porte décalée de 3 unités vers la droite
La valeur absolue décalée de 2 unités vers le bas.
La fonction rampe décalée de 2 unités vers la gauche et de 1 unité vers le bas.

Exercice 3 :

Décrire par intervalles puis donner l'expression, en utilisant $\mathcal{U}$(t), des fonctions suivantes :

1	2
	
3	**4**
	
5	**6**
	
7	**8**
	

TD 8: Introduction aux signaux : représentations

Exercice 1 :

Tracer les courbes des fonctions définies par :

f(t) = $cos(2t)$
g(t) = $-sin(t)$
h(t) = $2sin(t) + 1$
k(t) = $3cos(\pi t)$
l(t) = $sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 2 :

Tracer les courbes des fonctions définies par :

f(t) = $sin(t).\mathcal{U}$ (t),
g(t) = $sin(t-\pi).\ \mathcal{U}$ (t),
h(t) = $sin(t).\ \mathcal{U}$ $(t-\pi)$,
k(t) = $sin(t-\pi).\ \mathcal{U}$ $(t-\pi)$

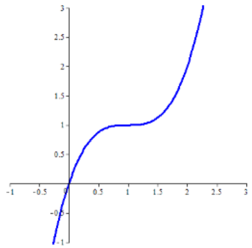
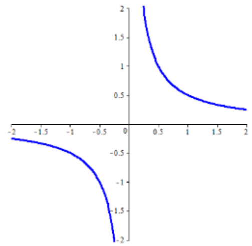
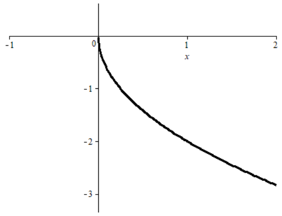
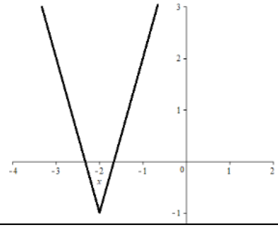
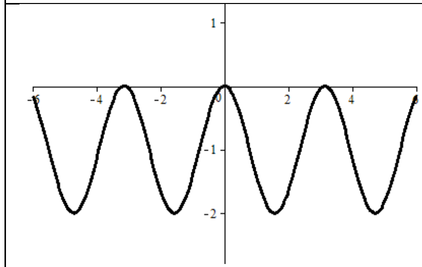
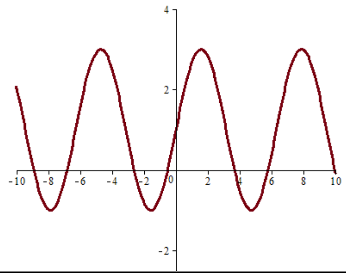
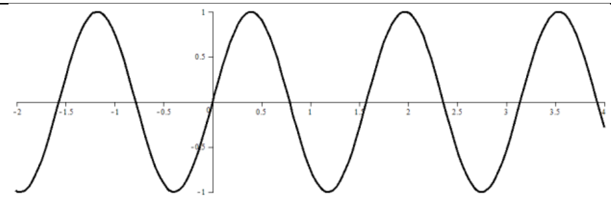
Exercice 3 :

Tracer la courbe représentative de f, puis en déduire celles de f_1 et f_2

$f(x) = x^2$	$f_1(x) = x^2 - 3$	$f_2(x) = (x+1)^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f_1(x) = \sqrt{-x}$	$f_2(x) = -\sqrt{-x+2}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$	$f_2(x) = \left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert - 1$

Exercice 4

Lire les fonctions suivantes

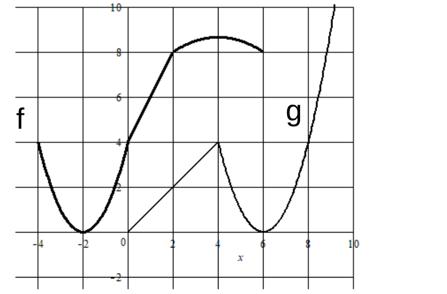
1	2
	
3	**4**
	
5	**6**
	
7	
	

TD 1 : La composition

Exercice 1

Sur simple lecture des graphiques de f et g que voici, évaluez chaque expression ou expliquez pourquoi elle n'est pas définie.

a) f(g(2))
b) g(f(6))
c) (g∘f)(-4)
d) (f∘g)(6)
e) (g∘g)(2)
f) (f∘f)(2)



Exercice 2

- Pour la fonction $f(x) = x^2 + 1$, exprimer $f(x+2), f(-x), f(3t)$, $f(\sqrt{x})$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

En plus : de même pour $f(x) = \frac{2}{1-x}$

- Pour chacune des fonctions h suivantes, trouver deux fonctions f et g telles que leur composée $f \circ g$ soit la fonction h proposée :

$$h_1(x) = \frac{1}{x-5};\ h_2(x) = \sqrt{7-x}\ ;\ h_3(x) = cos(x^2)$$

- Soient f, g et h trois fonctions réelles définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+5}; g(x) = x^2 - 4 \ et\ h(x) = \sqrt{x}$$

Déterminer les expressions des fonctions composées suivantes :
$f \circ g$; $g \circ f$; $h \circ g$; $f \circ f$ et $f \circ g \circ h$
Déterminer les domaines de définition de ces fonctions.

Exercice 3

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \ si\ x < 0 \\ sinx + 2 \ si\ 0 \leq x < \pi \\ cos^2 x + 1 \ si\ x \geq \pi \end{cases}$ est-elle continue ?

TD 2 : Fonctions réciproques

Exercice 1 Vrai ou faux ?

- Si f(x) = $\frac{3}{2x+1}$ alors $f^{-1}(x) = \frac{\frac{3}{x}-1}{2}$
- Si g(x) = sin(x – 2) alors $g^{-1}(x)$ = arcsin(x) + 2
- Si h(x) = $2.\sqrt{x+3}$ alors $h^{-1}(x) = 3 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 5$.

- Justifier que f admet une fonction réciproque.
- Déterminer la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 3

- Résoudre l'équation suivante : (E) $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = 2$
- Quel est l'antécédent de 2 par la fonction f définie par f(x) = $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$?
- En supposant qu'elle existe, donner la formule définissant la fonction réciproque de f.

Exercice 4

En supposant qu'elles existent, donner les formules définissant les fonctions réciproques de

- $f_1(x) = (2\sqrt{x}+1)^3$
- $f_2(x) = \frac{x-2}{3-2x}$

En plus : de même pour $f_3(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

TD 3 : Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1

Soit la fonction f : x $\to \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

1. Sur quels intervalles est-elle strictement monotone ?
2. Sur chacun de ces intervalles, expliciter sa fonction réciproque.
3. Dessiner f et les fonctions réciproques.

Exercice 2

En utilisant le cercle trigonométrique, donner les valeurs de :

arccos0, arccos$\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, arccos$\dfrac{3}{2}$, arcsin$\dfrac{1}{2}$, arcsin1, arctan$\sqrt{3}$,

arctan(-1), tan(arcsin$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$), arccos(cos2π), arcsin(sin$\dfrac{5\pi}{4}$),

cos(arccos(1)), arcsinπ , arctan(tan$\dfrac{4\pi}{3}$), sin(arcsin$\left(\dfrac{1}{2}\right)$)

Exercice 3

A partir des fonctions réciproques arccos, arcsin et arctan, tracer le graphe des fonctions suivantes :

arccos2x arcsin(x-2) 2arcsin$\dfrac{x}{3}$

Exercice 4

Soit la fonction de f : x $\to$ -3Arccos$\dfrac{1+x}{2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le domaine des images prises par f (Domaine des valeurs).
3. Exprimer x en fonction de y ; donner l'expression de la fonction réciproque y = f^{-1}(x) ; donner le domaine de définition de f^{-1}.
4. Tracer le dessin de f^{-1} et en déduire celui de f.

TD 4: Formules trigonométriques

Exercice 1

Lire directement sur le cercle trigonométrique, la relation

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

De la même façon, évaluer les expressions cos(arcsinx), tan(arcsinx).

Puis démontrer que arccosx + arcsinx = $\frac{\pi}{2}$.
Ce sont des angles complémentaires.

Exercice 2

Démontrer $(cosx + sinx)^2 = 1 + \sin(2x)$

Et $cos^4 x - sin^4 x = \cos(2x)$

Exercice 3

- Sachant que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ et $sinx = -\frac{1}{4}$, déterminer la valeur exacte de $cosx$ et $tanx$.
- En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(E_1) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (E_2) $\sin(3x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

TD 5: Formules trigonométriques

Exercice 1 : sommes de deux sinus

On souhaite effectuer le calcul de $g_\varphi(t) = sint + \sin(t+\varphi)$.
Soit la formule trigonométrique :

$$(F)\ sina + sinb = 2sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

1. Calculer $g_0(t)$.
2. Calculer $g_{\pi/2}(t)$ avec la formule *(F)*
3. Calculer $g_\pi(t)$.

On peut constater que l'amplitude est maximum lorsque les deux sinusoïdes sont en phase et minimum lorsqu'elles sont en opposition de phase. Cette amplitude peut alors s'annuler

En plus $g_{\pi/3}(t) = \sqrt{3}.\sin(t+\frac{\pi}{6})$

Exercice 2 : somme de sinus et cosinus

Soit $g(t) = \sin(2\pi t) + \sqrt{3}.cos(2\pi t)$.

1. Ecrire g sous la forme d'un sinus : $Asin(2\pi t + \varphi)$
2. Ecrire g sous la forme d'un cosinus : $Acos(2\pi t + \varphi)$

Et écrire sous forme d'un cosinus

$$g(t) = 4\sin(5\pi t) - 4cos(5\pi t)$$

Et

$$i(t) = 10.cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 5.sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 3 : réseau triphasé

Dans un réseau maillé, trois forces électromotrices e_1, e_2et e_3 sont alternatives, sinusoïdales de même pulsation ω de même amplitude E_m, mais elles ne sont pas en phase :

$$e_1(t) = E_m\sin(\omega t)$$
$$e_2(t) = E_m\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$e_3(t) = E_m\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Déterminer $E(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$.

TD 6 : exponentielles et logarithmes

Voici les formules à utiliser dans le TD :
A chaque modification d'écriture, dire quelle formule est utilisée.

Formule 1 : $e^a.e^b = e^{a+b}$

Formule 2 : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Formule 3 : $(e^a)^b = e^{ab}$

Formule 4 : $(ab)^n = a^n b^n$

Formule 5 : $ln(a) + ln(b) = ln(ab)$

Formule 6 : $ln(a) - ln(b) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Formule 7 : $b\,ln(a) = ln(a^b)$

Exercice 1 : calculs algébriques

Simplifier $27^{\frac{2}{3}}$ et $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Exprimer en fonction de $ln2$, les valeurs suivantes :

$$ln8\,;\ \frac{1}{2}ln16\,;\ ln\frac{1}{2}\,;\ ln36 - 2ln3$$

Exprimer en fonction de $ln2$ et $ln3$, les valeurs suivantes :

$$ln12\,;\ ln36\,;\ ln\frac{1}{81}$$

En plus *:* $ln(144)$ *et* $ln(0{,}75)$

Sans calculatrice, comparer $ln5 - ln3$ et $ln11 - ln9$

En plus : comparer $ln3 \times ln\frac{e^2}{3}$ et $ln9 - (ln3)^2$

Simplifier les écritures suivantes

$e^{-\ln(\frac{1}{2})}$ $\ln(e^{\sqrt{2}})e^{\frac{1}{2}ln4}$ $\frac{1}{e^{ln\frac{1}{3}}}$ e^{2-ln3} $\frac{e^{4+ln5}}{e^{3+ln4}}$

Exercice 2 : Equations/Inéquations

Résoudre

(E_1) $10^x = 5$ (E_2) $lnx = \frac{1}{2}$ (E_3) $ln\frac{1}{x^2} = 4$

(E_4) $\frac{2+e^{-x}}{7} = 3$ (E_5) $e^{x^2+1} = 4$ (E_6) $\ln(x^2 - 4) = \ln(4x + 1)$

(E_7) $ln(3 + x) + ln(3 - x) = ln5$ (E_8) $log_2(x + 2) = 4$

En plus (E_7) $2lnx = ln3 + ln(2x + 3)$ et (E_8) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

TD 7 : exponentielles et logarithmes

Exercice 1 : Equations/Inéquations

Déterminer les intervalles définis par :

(E_1) $lnx \leq 4$ (E_2) $ln(3+2x) \leq 0$ (E_3) $e^{x-1} > 1$

En plus : (E_4) $ln(2x+e) > 1$

Exercice 2 : les fonctions numériques

Calculer les images de $e; \frac{1}{e}; e^2; 1$ pour la fonction f_1 définie par

$$f_1(x) = (lnx)^2 + lnx.$$

Calculer les images de $-2 ; 0 ; 1$ pour la fonction f_2 définie par

$$f_2(x) = e^{x^2-2x}.$$

Quels sont les domaines de définition des fonctions définies par

$$h_1(x) = \ln(2x^2 - x - 3) \text{ et } h_2(x) = \ln(\frac{x^3}{1-x^2})$$

Si $g(x) = 2e^{x+3}$ alors $g^{-1}(x) = 3 - ln\left(\frac{x}{2}\right)$. VRAI ou FAUX.

En supposant qu'elle existe, donner la formule définissant la fonction réciproque de f(x) = $\dfrac{2+\ln x}{3\ln x - 1}$

TD 8 : Nombres complexes

Exercice 1 : calculs

Ecrire sous la forme a+ib (forme algébrique) les nombres complexes suivants :

- $z_1 = (3 - 2\mathrm{i})(1+i)^2$
- $z_2 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right))$
- $z_3 = \left[3, -\frac{7\pi}{6}\right]$
- $z_4 = (-2+i)^3$
- $z_5 = \dfrac{2+i}{1-2i}$
- $z_6 = \dfrac{1}{2+7i}$
- $z_7 = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(2-i)}$
- $z_8 = \dfrac{2-3i}{1+i} + \dfrac{2-i}{1-i}$

En plus : z = $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$; z = $\dfrac{-11+11i}{i}$; z = $\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$

Exercice 2 :Dessins

Dessiner les images des complexes suivants :

$$z_1 = 1\text{- }2\mathrm{i}$$

$$z_2 = [2\ ,\frac{\pi}{4}]$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_4 = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

Pour z_1 et z_2, dessiner

- l'opposé
- la multiplication par 2
- le conjugué
- l'inverse.

Dessiner

$$z_2 z_3$$

$$\frac{z_2}{z_3}$$

$$(z_3)^2$$

$$\sqrt{z_3}$$

Exercice 3 : forme exponentielle

Donner la forme exponentielle puis la forme polaire des complexes suivants :

$$z_1 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right))$$

$$z_2 = 1 + \mathrm{i}$$

$$z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$z_4 = -3$$

TD 9 : Nombres complexes

Exercice 1: forme exponentielle

Donner la forme exponentielle

$$z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = \overline{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_3 = \frac{i}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_4 = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_5 = \left(4e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^3$$

Exercice 2 :

Trouver la forme exponentielle de $\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ pour en déduire celle de

$$Z_4 = (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^3$$

Trouver les formes exponentielles de $1 + i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} + i$ pour en déduire celle de

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

Trouver les formes exponentielles de $1 - i$ et $\sqrt{3} - i$ pour en déduire celle de

$$z_6 = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^4}{(1-i)^2}$$

De même pour

$$z = \frac{-7i}{-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$$

TD 10 : Equations

Exercice 1:

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) $z^2 - 5z + 7 = 0$

(E_2) $z^2 - (3+2i)z + 1 + 3i = 0$

(E_3) $z^2 + 8 = 0$

(E_4) $z^2 + z + 1 = 0$

(E_5) $2z^2 + 6z + 5 = 0$

(E_6) $\frac{3z+2}{z+1} = z + 3$

Exercice 2:

Chercher les racines cubiques de - 8 en résolvant l'équation :

(E_5) $z^3 + 8 = 0$

Déterminer

1 - Les racines quatrièmes de $\frac{7}{2} + i\frac{7\sqrt{3}}{2}$

2 - les racines cubiques de $4(1 + i)$

Et résoudre (E_A) $z^2 = \frac{1+i}{1-i}$

TD 11 : Formules d'Euler et de Moivre

Exercice 1 :

A l'aide des formules d'Euler, démontrer que :

$$cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$
$$sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

(formules qui seront utilisées dans les intégrales)

Avec la formule de moivre : $(e^{ix})^2 = e^{i2x}$, démontrer

$$\cos(2x) = 2cos^2 x - 1$$

Et

$$\sin(2x) = 2sinxcosx$$

Exercice 2 :

Linéariser les expressions suivantes :

$$A(x) = \sin(x)\cos(x)$$

$$B(x) = (\sin(x))^2 \cos(x)$$

$$C(x) = (\cos(x))^3$$

Exercice 3 : réseau triphasé

Reprise de l'exo 6 du TD 4: Dans un réseau maillé, trois forces électromotrices e_1, e_2 et e_3 sont alternatives, sinusoïdales de même pulsation ω de même amplitude E_m, mais elles ne sont pas en phase :

$$e_1(t) = E_m \sin(\omega t - \varphi)$$
$$e_2(t) = E_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$e_3(t) = E_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

En utilisant les exponentielles complexes, de nouveau, déterminer $E(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$.

Exercice 4 :

En utilisant les nombres complexes, nous allons démontrer la relation suivante (voir formulaire) :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

1. En utilisant les relations d'Euler, écrire $\cos(a)$ sous forme exponentielle. Puis, écrire $\cos(a)$ sous forme exponentielle.
2. Évaluer ensuite le produit $\cos(a).\cos(b)$ en utilisant les règles de calcul de la fonction exponentielle.
3. En déduire l'expression ci-dessus que l'on cherche à démontrer.